Муниципальное автономное общеобразовательное учреждение города Новосибирска «Вторая Новосибирская гимназия»

Учитель математики Балаева Ирина Алексеевна

Урок математики по теме "Иррациональные уравнения"

для учеников 7 класса

Цель урока:
повторить основные теоретические понятия;
закрепить основные способы решения иррациональных уравнений
Задачи урока:
учить планировать работу, вырабатывать навыки конспектирования, развивать умение выделять главное, обобщать;
развивать память, внимание;
воспитывать ответственное отношение к учебному труду.
Тип урока: лекция
Ход урока:
1)Орг.момент
2) Изложение материала лекции**.**
Определение. Уравнение с одной переменной $f(x)=g(x)$ называется иррациональным, если хотя бы одна функция $f(x)$ или $g(x)$ содержит переменную x под знаком радикала.
При решении иррациональных уравнений используют тождественные преобразования, применяют метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень, а также метод введения новых переменных.
Теорема. Если возвести обе части уравнения $f(x)=g(x)$ в натуральную степень n, то полученное уравнение $f^n(x)=g^n(x)$ является следствием данного уравнения.
Основными причинами появления посторонних корней является возведение обеих частей уравнения в одну и ту же чётную степень, расширение области определения и др. По этим причинам необходимой частью решения иррационального уравнения является проверка, либо использование области определения заданного уравнения.

1. Метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень.

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{1+3x}=x+1$.
Решение. Возведя обе части уравнения в квадрат, получим

$$1+3x=x^2+2x+1;$$

$$x_1=0;\ x_2=1.$$

Сделав проверку, убеждаемся, что оба они являются его корнями. Это уравнение служит примером того, что возведение в квадрат исходного уравнения не всегда приводит к появлению посторонних корней.
Ответ: $x_1=0;\ x_2=1.$

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-1}=\sqrt{2+x}$.
Решение. Найдём область определения уравнения: [2; ?). Возведём обе части уравнения в квадрат, уединим затем полученный радикал и возведём ещё раз в квадрат. Получим корни уравнения $x_1=\frac{1+2\sqrt{13}}{3};\ x_2=\frac{1-2\sqrt{13}}{3}$.

После проверки получим корень уравнения $x_1 = \frac{1+2\sqrt{13}}{3}$.

Ответ: $x_1 = \frac{1+2\sqrt{13}}{3}$.

Пример 3. Решить уравнение $\sqrt{x^2+x-5} + \sqrt{x^2+8x-4} = 5.$

Решение. Уравнение перепишем так: $\sqrt{x^2+x-5} = 5 - \sqrt{x^2+8x-4}.$ Возведём обе части в квадрат, получим $10\sqrt{x^2+8x-4} = 7x + 26.$

$x_1 = 2, x_2 = -\frac{538}{51}.$

x=2 проверить нетрудно, а $x = -\frac{538}{51}$ проверять громоздко. Однако заметим, что $(7x+26)$ при этом значении отрицательно. Значит, $x = -\frac{538}{51}$ не является решением уравнения.

Ответ: x=2.

2. Метод введения новых переменных.

Пример 4. Решить уравнение $x^2 + 3 - \sqrt{2x^2-3x+2} = 1{,}5(x+4).$

Решение. Умножив обе части уравнения на 2, получим:

$2x^2 + 6 - 2\sqrt{2x^2-3x+2} = 3(x+4);$

$2x^2 - 3x + 2 - 2\sqrt{2x^2-3x+2} - 8 = 0.$

Обозначив $\sqrt{2x^2-3x+2} = y,$ получим:

$y^2 - 2y - 8 = 0;\ y_1 = 4, y_2 = -2.$

Далее, $\left[\begin{array}{l}\sqrt{2x^2-3x+2} = 4\\ \sqrt{2x^2-3x+2} = -2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_1 = \frac{7}{2}\\ x_2 = -2\end{array}\right.$.

Ответ: $x_1 = \frac{7}{2}; x_2 = -2.$

Пример 5. Решить уравнение: $\sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{15+x} = 2.$

Решение. Обозначим $\sqrt[4]{1-x} = a,\ \sqrt[4]{15+x} = b,$ тогда $1 - x = a^4, 15 + x = b^4.$

Составим систему уравнений:

$\begin{cases} a + b = 2 \\ a^4 + b^4 = 16 \end{cases}.$

Решением системы является (0; 2) и (2; 0). Таким образом, решение данного уравнения свелось к решению следующей совокупности систем уравнений:

$\begin{cases}\sqrt[4]{1-x}=0\\ \sqrt[4]{15+x}=2\end{cases}$ и $\begin{cases}\sqrt[4]{1-x}=2\\ \sqrt[4]{15+x}=0\end{cases}$.

Решив эту совокупность, находим $x_1=1,\ x_2=-15.$

Ответ: -15; 1.

3. Искусственные приёмы решения иррациональных уравнений.

Пример 6. Решить уравнение $\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}=3x.$

Решение. Умножим обе части уравнения на выражение $\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5}.$

После преобразования уравнение примет вид:

$x(\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5}-2)=0.$

$x=0$ - корень уравнения. Теперь решим уравнение

$\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5}=2.$

Почленно сложив это уравнение с данным, придем к уравнению:

$2\sqrt{2x^2+3x+5}=3x+2.$

Решая это уравнение методом возведения в квадрат, получим $x_2=4;\ x_3=-4.$ Но, *x*=-4 посторонний корень.

Ответ: 0; 4.

Заменой неизвестной величины решение иррациональных уравнений можно свести к решению тригонометрических уравнений.

При этом полезно помнить:

Если в уравнение входит $\sqrt{a^2-x^2}$, то замена $x=a\sin t$ или $x=a\cos t.$

Если в уравнение входит $\sqrt{a^2+x^2}$, то замена $x=a\operatorname{tg}t.$

Если в уравнение входит $\sqrt{x^2-a^2}$, то $x=\dfrac{a}{\sin t}$ или $x=\dfrac{a}{\cos t}.$

Пример 7. Решить уравнение $\sqrt{x^2+1}-x=\dfrac{5}{2\sqrt{x^2+1}}.$

Решение. Сделаем замену $x=\operatorname{tg}t,\ t\in(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}),$ получим:

$\dfrac{1}{\cos t}-\operatorname{tg}t=\dfrac{5}{2}\cos t.$

Так как $\cos t\neq 0,$ то $2-2\sin t=5(1-\sin^2 t).$

$\sin t=1$ и $\sin t=-\dfrac{3}{5}.$

Учитывая, что $t\in(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}),$ получим $t=\arcsin(-\dfrac{3}{5}).$ Поэтому,

$x=\operatorname{tg}(\arcsin t(-\dfrac{3}{5}))=-\dfrac{3}{4}.$

Ответ: $-\frac{3}{4}$.

4. Использование монотонности функции.

Иногда при решении уравнений не видно преобразований, которые позволяют увидеть замену или применить один из известных способов, хотя сразу виден один или более корней.

Пример 8. Решить уравнение $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+8}=5.$

Можно решить это уравнение путем двукратного возведения в квадрат. Но рассмотрим другой метод:

Подберём один или несколько корней уравнения.

Докажем, что других корней нет или найти остальные корни.

После проверки $x=1$ - корень уравнения. Так как функция $y=\sqrt{x+3}+\sqrt{x+8}$ возрастает в области определения, а монотонная функция принимает каждое своё значения один раз, то других корней уравнение не имеет.

Ответ:1.

Пример 9. Решить уравнение $\sqrt{x+8}-\sqrt{x+3}=2.$

Решение. При проверке $x=1$ - корень уравнения. Для того, чтобы использовать свойство монотонности функции, преобразуем левую часть уравнения.

$$\sqrt{x+8}-\sqrt{x+3}=\frac{(\sqrt{x+8}-\sqrt{x+3})(\sqrt{x+8}+\sqrt{x+3})}{\sqrt{x+8}+\sqrt{x+3}}=\frac{5}{\sqrt{x+8}+\sqrt{x+3}}.$$

Так как функция $y=\frac{5}{\sqrt{x+8}+\sqrt{x+3}}$ убывает в области определения, то $x=1$ - единственный корень.

Ответ: 1.

3) Закрепление

Доказать, что уравнения не имеют корней:

1. $\sqrt{x+2}=-2;$
2. $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+3}=0;$
3. $\sqrt{x}+\sqrt{x+9}=2;$
4. $\sqrt[6]{1-x}=\sqrt[3]{x-2}.$

4) Практическая работа. Дополнительные уравнения.

1. $\sqrt{x+5}-\sqrt{5-x}=2;$ Ответ: 4. Новые переменные.
2. $3\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2}=7;$ Ответ: 6. Возведение в квадрат.
3. $\sqrt{11x+3}-\sqrt{2-x}-\sqrt{9x+7}+\sqrt{x-2}=0;$ Ответ: 0. Возведение в квадрат.
4. $\frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}=\frac{2}{x};$ Ответ: -2; 2. Искусственный способ.
5. $\frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{2}+x}=\frac{2-x}{2+x};$ Ответ 0; 2. Замена.

6. $\sqrt[3]{(x+1)^2}+2\sqrt[3]{(x-1)^2}=3\sqrt[3]{x^2-1};$ Ответ: $\frac{9}{7}.$ Замена.

7. $x+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{35}{12};$ Ответ: $\frac{5}{3};\frac{5}{4}.$ К тригонометрическому уравнению.

8. Сколько корней на $[0;1]$ имеет уравнение $8x(2x^2-1)(8x^4-8x^2+1)=1?$
Ответ: 3 корня..

9. $\sqrt{x+3}+\sqrt{2x+7}=5;$ Ответ: 1. Монотонность.

10. $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}=\sqrt{2};$ Ответ: 1. Монотонность.