Муниципальное автономное общеобразовательное учреждение города Новосибирска «Вторая Новосибирская гимназия»
Учитель математики Балаева Ирина Алексеевна

Разработка урока математики для 8 класса
Тема: "Решение уравнений, содержащих знак модуля"

Цель урока: отработать приемы решения уравнений, содержащих знак модуля; выработать умение решать любые уравнения содержащих знак модуля.

ХОД УРОКА

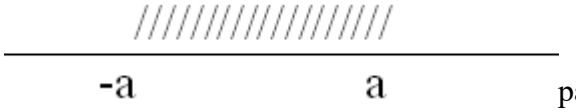
1. Организационная часть

2. Повторение

а) Определение: «Модулем числа *a* называется расстояние от начала отчета до точки изображающей это число на координатной прямой».
Модулем называют также абсолютную величину, т.е. |5| = 5; | – 3| = 3; |0| = 0.

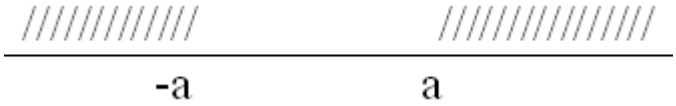
б) Основные свойства модуля:

1) $|a| \geq 0$
2) $| - a| = |a|$
3) $a \leq |a|$
4) $|x| < a$, (если $a > 0$)



равносильно неравенству $-a < x < a$

5) $|x| > a$ (если $a > 0$) равносильно двум неравенствам $x < -a$ и $x > a$



3. Объяснение материала с одновременной практической отработкой

Рассмотрим примеры решения уравнений, содержащих знак модуля.

Пример 1:

Решить уравнение: $|5x - 3| = 2x + 1$

Решение:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 5x-3 = 2x+1, \\ 5x-3 = -(2x+1), \end{array}\right. \\ 2x+1 \geq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 3x = 4, \\ 7x = 2, \end{array}\right. \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \frac{4}{3} \\ x = \frac{2}{7} \end{array}\right. \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ответ: $\frac{2}{7}; \frac{4}{3}$

Решить это уравнение можно используя аналитическую запись определения модуля числа *a*, т.е.

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a > 0 \\ 0, & \text{если } a = 0 \\ -a, & \text{если } a < 0 \end{cases}$$

Выделим виды уравнений с модулем:

I. Решим уравнение вида:

|f (*x*)| = |q (*x*)|
т.к. |a| = |b|, если a = ± b, то
|f (*x*)| = |q (*x*)| <=> f (*x*) = ± q (*x*) <=>
f2 (*x*) – q2 (*x*) = 0.

Например,

|x – 2| = |2x – 1|
x – 2 = 2x – 1 или x – 2 = – (2x – 1)
– x = 1 x – 2 = – 2x + 1
x = – 1 x = 1
Ответ: – 1; 1.

Решить самостоятельно:

1-й уровень:

а) $|x^3 + x + 1| = 1$ $x^3 + x = 0$, x (x² + 1) = 0, x = 0
$x^3 + x + 1 = 1$ $x^3 + x + 2 = 0$, x = – 1.
$– x^3 – x – 1 = 1$

Ответ: – 1; 0.

2-й уровень:

б) $|x^2 – x – 2| = |2x^2 – x – 1|$ или $x^2 – x – 2 = – (2x^2 – x – 1)$
$x^2 – x – 2 = 2x^2 – x – 1$ $x^2 – x – 2 = – 2x^2 + x + 1$

$x^2 + 1 = 0$ $3x^2 – 2x – 3 = 0$
корней нет $D = 4 + 36 = 40$

$$x_1 = \frac{2-2\sqrt{10}}{6} = \frac{1-\sqrt{10}}{3}$$
$$x_2 = \frac{2+2\sqrt{10}}{6} = \frac{1+\sqrt{10}}{3}$$

II. Решение уравнений вида:

$|f(x)| = q(x)$
Можно указать два приема решения таких уравнений:
1) $|f(x)| = q(x)$ имеет корни, если

$q(x) \geq 0$, т.е. $|f(x)| = q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \pm q(x) \\ q(x) \geq 0 \end{cases}$

Поэтому достаточно решить два уравнения $f(x) = q(x)$, $f(x) = -q(x)$ и для найденных значений x проверить справедливость неравенства $q(x)$? 0.

2) Т.к. $|f(x)| = f(x)$, если $f(x) \geq 0$
$|f(x)| = -f(x)$, если $f(x) < 0$, то уравнение $|f(x)| = q(x)$ равносильно каждой из следующих систем:

$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = q(x) \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x) < 0 \\ f(x) = -q(x) \end{cases}$

Решив каждое уравнение необходимо проверить выполнения неравенства.

Например:

$|x^3 + 3x^3 + x| = -x + x^3$
$x^3 + 3x^2 + x = -x + x^3$ и $x^3 + 3x^2 + x = x - x^3$
$3x^2 + 2x = 0$ $2x^3 + 3x^2 = 0$
$x(3x + 2) = 0$ $x^2(2x + 3) = 0$

$x = 0$ или $x = -\frac{2}{3}$ $x = 0$ или $x = -\frac{3}{2}$

Проверим выполнения неравенства

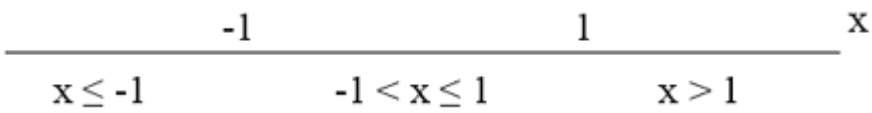
$x^3 - x \geq 0$

Ответ: $x = -\frac{2}{3}$; 0.
III. Решение уравнений вида: $|f1(x)| + |f2(x)| + \ldots + |fn(x)| = q(x)$

Эти уравнения основаны в решении на определения, т.е. $|a| = a$, если $a \geq 0$
$|a| = -a$, если $a < 0$
$fn(x)$ могут быть многочленами, дробно-рациональными функциями и т.д.
Для каждой функции находят область определения, ее нули, точки разрыва. Нули и точки разрыва разбивают общую область на промежутки, в каждом из которых каждая из функций $fn(x)$ сохраняет постоянный знак. Затем, используя определение модуля для каждой из найденных областей, получим уравнение, подлежащее решению.

Например:

|x + 1| – |x – 1| = 2
x = – 1 x = 1



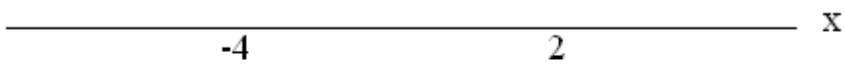
$x \le -1$	$-1 < x \le 1$	$x > 1$
– x – 1 + x – 1 = 2 – 2 = 2 нет корней	x + 1 + x – 1 = 2 2x = 2 x = 1 является корнем	x + 1 – x + 1 = 2 2 = 2 x Є (1; + ∞)

Ответ: [1; + ∞).

Решить самостоятельно:

1-й уровень:

2|x – 2| – 3 |x + 4| = 1
x = 2 x = – 4

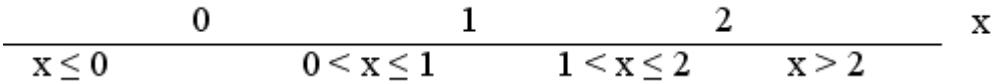


$x \le -4$	$-4 < x \le 2$	$x > 2$
2(2 – x) + 3(x + 4) = 1 4 – 2x + 3x + 12 = 1 x = – 15 является корнем	2(2 – x) – 3(x + 4) = 1 4x – 2x – 3x – 12 = 1 x = – 1,8 является корнем	2x – 4 – 3x – 12 = 1 – x = 15 + 2 x = – 17 не является корнем

Ответ: – 15; – 1,8.

2-й уровень:

|x2 – x| + |x – 2| = x2 – 2
x (x – 1) = 0 x – 2 = 0
x = 0, x = 1 x = 2



$x \le 0$	$0 < x \le 1$	$1 < x \le 2$	$x > 2$
x2 – x – x + 2 = x2 – 2 – 2x = – 4 x = 2 нет решений	– x2 + x – x + 2 = x2 – 2 2x2 = 4 x2 = 2 $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$ нет решений	x2 – x – x + 2 = x2 – 2 – 2x = – 4 x = 2 является решением	x2 – x + x – 2 = x2 – 2 – 2 = – 2 x Є (2; + ∞)

Ответ: [2; + ∞).

4. Домашнее задание.

Решить уравнения:

а) $|3x - 5| = 2x + 1$
б) $|3x - 8| - |3x - 2| = 6$
в) $|2x + 7| - 2\,|3x - 1| = 4x + 1$